TITLE:
準凸計画問題における制約想定とその適用例 (非線形解析学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):
鈴木, 聡; 黒岩, 大史

CITATION:
鈴木, 聡 ...[et al]. 準凸計画問題における制約想定とその適用例 (非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2010, 1685: 237-242

ISSUE DATE:
2010-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/141439

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 237-242

準凸計画問題における制約想定とその適用例

島根大学大学院総合理工学研究科　鈴木　聡 (Satoshi Suzuki),
島根大学総合理工学部　黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

概要

本論文では, 準凸計画問題における制約想定 [12] を紹介し, それを用いた最適性条件について述べる. さらに, 具体的な数理計画問題に対して適用し, その有用性について述べる.

1 Introduction

本論文では, 次のような数理計画問題について考える. I を任意の添字集合, f, g_i をそれぞれ X から $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ への関数としたとき, f を $A=\{x\in X \mid \forall i\in I, g_i(x)\leq 0\}$ の上で最小化する問題である. この問題において, 各関数が凸関数であるとき凸計画問題と呼ばれ, 多くの研究者によって研究がなされてきた. その中でも劣微分を用いた最適性条件

$$f(x_0)=\min_{x\in A}f(x) \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)} \text{ s.t. } 0\in\partial f(x_0)+\sum_{i\in I}\lambda_i\partial g_i(x_0)$$

は広く知られている. さらに, この最適性条件に関する制約想定もまた広く研究されている. 制約想定とは, 条件が成り立つために必要な仮定のことであり, 代表的なものとして Slater 条件などが挙げられる. 近年, この最適性条件についての制約想定の中で最弱となるものが Li, Ng, Pong によって提案された ([5]). Basic constraint qualification (BCQ) と呼ばれるこの制約想定は, 最適性条件が成り立つことと同値な条件となっており, その意味において最弱の制約想定と呼ばれるものである.

さらに, 凸計画問題の拡張である準凸計画問題においては, 凸解析における劣微分や Fenchel 共役関数などがあまり有用な働きをなさないため, さまざまな新しい共役関数やそれに伴う新しい劣微分の概念を用いて最適性条件の研究がなされてきた. しかしそれらは, もし関数が凸であったとしても, 上であげている劣微分を用いた最適性条件と直ちに同値であることが導けるような条件ではなく, 直接的な拡張とは言えないものでもあった.

そこで我々は, [12] において, 準凸計画問題に対する BCQ 型制約想定 (Q-BCQ) を定義し, それを用いた最適性条件について研究を行った. その際に, Penot, Volle による準凸関数の特徴づけに関する定理が非常に重要な役割をなしている. さらに, Q-BCQ および最適性条件は BCQ の直接的な拡張になっており, 凸計画問題において適用しても有用性のある概念であることも示している.

本論文では, Q-BCQ について, 定義と BCQ との関係性について述べ, 実際の数理計画問題に適用した例を紹介する.

2 Notation and Preliminaries

本論文を通じて, X は局所凸ハウスドルフ線形位相空間, X^* をその双対空間, f は X から $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ への関数とする. f が準凸関数であるとは, 任意の x_1, $x_2 \in X$, $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう. また, f が準凹関数であるとは, $-f$ が準凸関数であるときをいい, 関数 f が quasi-affine であるとは, f が準凸かつ準凹であるときをいう.

次に, 準凸関数に関する次の定理を紹介する.

Theorem 1. [7] f が下半連続準凸関数であることと, $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$ となるような I : 添字集合, $\{w_i\}_{i \in I} \subset W$ および $\{k_i\}_{i \in I} \subset Q = \{h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}};$ 下半連続非減少 $\}$ が存在することは同値である.

Theorem 1 において, $\{k_i\} \subset Q$ であることから, 各 $i \in I$ に対して, $k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ は下半連続 quasi-affine 関数であることがわかる. よって, Theorem 1 は, 下半連続準凸関数はある下半連続 quasi-affine 関数の族の上限に等しいということを示している. このことは, 下半連続凸関数が, ある affine 関数の上限に等しいということと非常に良く対応している. この定理を用いて, 準凸関数の generator を定義する, すなわち $\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset Q \times X^*$ が準凸関数 f の generator であるとは $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$ が成り立つときをいう. その代表的な例として, f が下半連続真凸関数であるとき, $\{(k_v, v) \mid v \in \mathrm{dom} f^*, k_v(t) = t - f^*(v), \forall t \in \mathbb{R}\} \subset Q \times X^*$ は f の generator である. 実際, 任意の $x \in X$ に対して,

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup\{\langle v, x \rangle - f^*(v) \mid v \in \mathrm{dom} f^*\} = \sup_{v \in \mathrm{dom} f^*} k_v(\langle v, x \rangle),$$

が成り立つことよりわかる. [12] においてこれを basic generator と定義している.

次に [12] における Q-BCQ の定義について述べる.

Definition 1. [12] $\{g_i \mid i \in I\}$: 準凸関数の集合, 任意の $i \in I$ に対して, $\{(k_{(i,j)}, w_{(i,j)}) \mid j \in J_i\} \subset Q \times X^*$ は g_i の generator, $T = \{(i,j) \mid i \in I, j \in J_i\}$, $T(x) = \{t \in T \mid k_t(\langle w_t, x \rangle) = 0,$ $k_t^{-1}(0) = \langle w_t, x \rangle\}$, $A = \{x \in X \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$. このとき, $\{g_i \mid i \in I\}$ が $x \in A$ において $\{(k_t, w_t) \mid t \in T\}$ に関する Q-BCQ (準凸計画問題に対する basic constraint qualification) を満たすとは

$$N_A(x) = \mathrm{coneco} \bigcup_{t \in T(x)} \{w_t\}$$

が成り立つときをいう.

さらに, [5] における BCQ の定義は以下のとおりである. $\{g_i \mid i \in I\}$: 下半連続真凸関数の集合, $A = \{x \in X \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$, $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ のとき, $\{g_i \mid i \in I\}$ が $x \in A$ において BCQ を満たすとは

$$N_A(x) = \mathrm{cone} \bigcup_{i \in I(x)} \partial g_i(x)$$

が成り立つときである．ここで Q-BCQ は BCQ の拡張であることを示す．$\{g_i \mid i \in I\}$：下半連続真凸関数の集合としたとき，任意の $i \in I$ について，$\{(k_{(i,v)}, v) \mid v \in \mathrm{dom} g_i^*, k_{(i,v)}(t) = t - g_i^*(v), \forall t \in \mathbb{R}\} \subset Q \times X^*$ は g_i の generator であり，$T = \{(i,v) \mid i \in I, v \in \mathrm{dom} g_i^*\}$ となる．このとき任意の $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned}
T(x) &= \{(i,v) \in T \mid k_{(i,v)}(\langle v, x\rangle) = 0, k_{(i,v)}^{-1}(0) = \langle v, x\rangle\} \\
&= \{(i,v) \in T \mid g_i(x) = k_{(i,v)}(\langle v, x\rangle) = 0, k_{(i,v)}^{-1}(0) = \langle v, x\rangle\} \\
&= \{(i,v) \in T \mid g_i(x) = \langle v, x\rangle - g_i^*(v) = 0, g_i^*(v) = \langle v, x\rangle\} \\
&= \{(i,v) \in T \mid g_i(x) = 0, g_i(x) + g_i^*(v) = \langle v, x\rangle\} \\
&= \{(i,v) \in T \mid g_i(x) = 0, v \in \partial g_i(x)\}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\bigcup_{(i,v)\in T(x)} \{v\} = \bigcup_{i \in I(x)} \partial g_i(x),$$

すなわち BCQ は basic generator に関する Q-BCQ と同値になっていることがわかる．

さらに，[12] において，次のような最適性条件に関する定理を得た．

Theorem 2. [12] $\{g_i \mid i \in I\}$：準凸関数の集合，任意の $i \in I$ に対して，$\{(k_{(i,j)}, w_{(i,j)} \mid j \in J_i\} \subset Q \times X^*$：$g_i$ の generator，$T = \{(i,j) \mid i \in I, j \in J_i\}$，$T(x) = \{t \in T \mid k_t(\langle w_t, x\rangle) = 0, k_t^{-1}(0) = \langle w_t, x\rangle\}$，$A = \{x \in X \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$，$x_0 \in A$．このとき，以下の二つの条件は同値である．

(i) $\{g_i(x) \leq 0 \mid i \in I\}$ は x_0 において $\{(k_t, w_t) \mid t \in T\}$ に関する Q-BCQ を満たす，

(iii) 任意の下半連続真凸かつ $\mathrm{dom} f \cap S \neq \emptyset$，$\mathrm{epi} f^* + \mathrm{epi}\delta_S^*$：w*-closed であるような関数 f に対して，

$$x_0 \text{ is a minimizer of } f \text{ in } A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T(x_0))} \text{ s.t. } 0 \in \partial f(x_0) + \sum_{t \in T(x_0)} \lambda_t w_t.$$

3 examples

次の集合について考える．

$$L = \{k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)} \mid (\alpha,\beta,\gamma,p) \in \mathbb{R}^4, \alpha \geq 0, p > 0\},$$

ここで，$k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}$ は次のような $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする; $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}(t) = \mathrm{sgn}(t - \beta)\ \alpha\ |t - \beta|^p + \gamma.$$

また，$\mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$ $(t \neq 0)$，$\mathrm{sgn}(0) = 0$ とする．明らかに，$k_{(\alpha,\beta,\gamma,p)}$ は連続非減少関数であるので，$L \subset Q$ が成り立つ．この章では L によって表される下半連続準凸関数の族，すなわち，

$$\mathcal{F}_L = \{\sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot\rangle) \mid I：\text{添字集合}, \{k_i\}_{i\in I} \subset L, \{w_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n\}$$

に属する関数について考える．ここで，この関数の族 $\mathcal{F}_L$ は，十分に広いクラスであるということが言える．まず，明らかに，全ての凸関数は $\mathcal{F}_L$ に含まれている．さらに，下半連続準凸関数 f が，次の条件

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0 \text{ かつ 下に有界,}$$

を満たすとき，$\mathcal{F}_L$ に属すことがわかる (see [10])．さらに，L の関数はその逆関数を求めやすいため，Theorem 2 などにおいて非常に扱いやすいものとなっている．

以下において，Theorem 2 における最適性条件に対する，具体的な適用例を与える．

Example 1. 次のような $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $g \in \mathcal{F}_L$ について考える．

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} - 2 & \text{if} \quad x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x} - 2 & \text{if} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(x-1)^2 - 3 & \text{if} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

このとき確かに $g \in \mathcal{F}_L$ である．実際 $k_1 = k_{(1,2,-2,\frac{1}{2})} = \mathrm{sgn}(t-2)\ |t-2|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$, $k_2 = k_{(\frac{1}{3},-1,-3,2)} = \mathrm{sgn}(t+1)\ \frac{1}{3}\ |t+1|^2 - 3$, $w_1 = 1$, $w_2 = -1$ とすると，$g(x) = \max_{i=1,2} k_i(w_i x)$ が成り立つ．さらにこのとき，

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\} = [-2, 6].$$

任意の $x \in A$ に対して，$-2 < x < 6$ のとき，$I(x) = \emptyset$, $N_A(x) = \{0\}$ であり，Q-BCQ は成立する．$x = -2$ のとき，$I(x) = \{2\}$, $N_A(x) = \{y \mid y \leq 0\}$ であり，Q-BCQ は成立する．$x = 6$ のとき，$I(x) = \{1\}$, $N_A(x) = \{y \mid y \geq 0\}$ であり，Q-BCQ は成立する，すなわち任意の x に対して Q-BCQ が成り立つことがわかる．さらに，任意の $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して $f(y) = \alpha(y-\beta)^{2m} + \gamma$ として凸関数 f を定義する．このとき，この関数 f は微分可能であり $f'(y) = 2m\alpha(y-\beta)^{2m-1}$ である．ここで $-2 \leq \beta \leq 6$ のとき，$x = \beta$, $\lambda = (0,0)$ とおくと $0 \in f'(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i w_i$ が成り立つ．このとき Theorem 2 からもわかるように f は $x = \beta$ で最小値 γ をとる．$\beta < -2$ のとき，$x = -2$, $\lambda = (0, 2m\alpha(-2-\beta)^{2m-1})$ とおくと $0 \in f'(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i w_i$ が成り立つ．このとき Theorem 2 からもわかるように f は $x = -2$ で最小値をとる．$\beta > 6$ も同様に，Theorem 2 より最適性条件を用いて最適解を見つけることができる．

Example 2. 次のような $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数 $g \in \mathcal{F}_L$ について考える．

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1} - 3 & \text{if} \quad x_1 \geq 0, -\frac{x_1}{4} \leq x_2 \leq \frac{x_1}{8} \\ 2\sqrt{2x_2} - 3 & \text{if} \quad x_2 \geq 0, x_2 \geq -\frac{27x_1}{8}, x_2 \geq \frac{x_1}{8} \\ 3\sqrt{-3x_1} - 3 & \text{if} \quad x_1 \leq 0, \frac{27x_1}{4} \leq x_2 \leq -\frac{27x_1}{8}, \\ 2\sqrt{-x_2} - 3 & \text{if} \quad x_2 \leq 0, x_2 \leq -\frac{27x_1}{4}, x_2 \leq -\frac{x_1}{4} \end{cases}$$

このとき確かに $g \in \mathcal{F}_L$ である．実際 $I = \{1,2,3,4\}$, $w_1 = (1,0)$, $w_2 = (0,2)$, $w_3 = (-3,0)$, $w_4 = (0, -\frac{1}{4})$, 各 $i \in I$ に対して，k_i を

$$k_i(t) = k_{(i,0,-3,\frac{1}{2})}(t) = \mathrm{sgn}(t)\ i \mid t \mid^{\frac{1}{2}} - 3$$

とすると $g = \sup_{i \in I} k_i(\langle w_i, \cdot \rangle)$ が成り立つことがわかる．このとき，

$$A = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid g(y) \leq 0\} = \left[-\frac{1}{3}, 9\right] \times \left[-\frac{9}{4}, \frac{9}{8}\right].$$

任意の $x = (x_1, x_2) \in A$ に対して，$x \in \mathrm{int}A$ の場合，Q-BCQ が成り立つことは明らか．$x \notin \mathrm{int}A$ の場合，$x_1 = -\frac{1}{3}$，$\frac{9}{4} < x_2 < \frac{9}{8}$ のとき $I(x) = \{3\}$ であり

$$N_A(x) = \{y = (y_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq 0\} = \mathrm{coneco}\{(-3, 0)\} = \mathrm{coneco}_{i \in I(x)}\{w_i\},$$

となり Q-BCQ が成り立っている．そのほかの場合も同様に Q-BCQ が成り立つことが確かめられる．さらに，$f(y) = (y_1 - 12)^2 + (y_2 - 3)^2$ とすると，この関数は微分可能であり $\nabla f(y) = (2(y_1 - 12), 2(y_2 - 3))$ となる．このとき，$0 \in \nabla f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$ となるような $\lambda \in \mathbb{R}^I_+$ が存在する x は $(9, \frac{9}{8})$ のみであり，そのときの λ は $(6, \frac{15}{8}, 0, 0)$ である．Theorem 2 からもわかるように，f は $(9, \frac{9}{8})$ において最小値 $\frac{801}{64}$ をとる．このようにして，Theorem2 の最適性条件を用いて最適解を見つけることができる．

参考文献

[1] R. I. Boţ, G. Wanka, *An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification*, Nonlinear Anal. 64 (2006), pp. 1367–1381.

[2] M. A. Goberna, V. Jeyakumar and M. A. López, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008), pp. 1184–1194.

[3] V. Jeyakumar, *Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex constraints*, SIAM J. Optim. 13 (2003), pp. 947–959.

[4] V. Jeyakumar, N. Dinh and G. M. Lee, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathmatics, University of New South Wales, 2004.

[5] C. Li, K. F. Ng and T. K. Pong, *Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization*, SIAM J. Optim. 19 (2008), pp. 163–187.

[6] O. L. Mangasarian, *Set containment characterization*, J. Global Optim. 24 (2002), pp. 473–480.

[7] J. P. Penot, and M. Volle, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990), pp. 597–625.

[8] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Set containment characterization for quasiconvex programming*, J. Global Optim. 45, (2009), pp. 551–563.

[9] S. Suzuki, *Set containment characterization with strict and weak quasiconvex inequalities*, J. Global Optim. to appear.

[10] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Generalized characterizations on set containments for a certain class of quasiconvex functions*, the proceedings of NAO2008, to appear.

[11] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, submitted.

[12] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *The basic constraint qualification for quasiconvex inequality systems*, preprint.